Über

Nicht-euklidische Cykliden.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der K. Ludwig-Maximilians-Universität München

am 28. Mai 1906

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Konrad Münich

aus München.

München 1906

Kgl. Hof- und Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552318_0094

Einleitung.

Eine Cyklide ist einerseits definiert als eine Fläche vierter Ordnung, welche den unendlich fernen Kugelkreis zur Doppelkurve hat, andererseits als die Enveloppe einer variablen Kugel, welche eine feste Kugel, die sogenannte Direktorkugel, stets orthogonal schneidet, und deren Mittelpunkt eine feste Fläche zweiten Grades, die sogenannte Deferente, durchläuft. Die Gleichung der Cyklide, welche allgemein folgende Form hat:

$$1. \qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2u_1(x^2 + y^2 + z^2) + u_2 = 0$$

wobei u_1 ein homogenes Polynom ersten Grades, u_2 ein beliebiges Polynom zweiten Grades darstellt, kann durch passende Wahl des Koordinatensystems auf die Form gebracht werden:

$$2. \qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0$$

Mittels eines bei Darboux[1]) angegebenen Kunstgriffes gewinnt man aus obiger Gleichung folgende Relationen:

$$3. \qquad \frac{C}{\lambda - A} + \frac{C'}{\lambda - A'} + \frac{C''}{\lambda - A''} + D - \lambda^2 = 0$$

$$4. \qquad \frac{a^2}{\lambda - A} + \frac{b^2}{\lambda - A'} + \frac{c^2}{\lambda - A''} = 1$$

$$5. \qquad d^2 = -\lambda - \frac{Ca}{\lambda - A} - \frac{C'b}{\lambda - A'} - \frac{C''c}{\lambda - A''}$$

wobei λ einen Parameter, a, b, c die Koordinaten des Mittelpunktes der variablen Kugel (oder, was dasselbe ist, die Koordinaten des Mittelpunktes einer der die Cyklide doppelt berührenden Kugeln) darstellt. Hiebei ist gesetzt:

$$6. \qquad 2d^2 = r^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

---

[1]) Darboux: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, pag. 114 u. folg.

Gleichung 3 gibt fünf Werte für λ und somit eine fünffache Erzeugungsweise für ein und dieselbe Cyklide. Gleichung 4 stellt eine Relation dar zwischen den Koordinaten des Mittelpunktes der variablen Kugel, d. h. faßt man a, b, c als Veränderliche auf, so hat man die von dem Mittelpunkt dieser variablen Kugel durchlaufene Fläche, oder, mit anderen Worten:

7. $$\frac{x^2}{\lambda - A} + \frac{y^2}{\lambda - A'} + \frac{z^2}{\lambda - A''} = 1$$

gibt für jeden der fünf Werte von λ, welche die Gleichung 3 befriedigen, die zugehörige „Deferente". Endlich liefert noch die dritte Gleichung 5 das d^2 und somit, wie aus Gleichung 6 leicht ersichtlich ist, den jeweiligen Radius r der variablen Kugel, wenn die Koordinaten ihres Mittelpunktes bekannt sind. Durch Substitution des für r sich ergebenden Wertes in die allgemeine Kugelgleichung erhält man:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + 2\lambda + \frac{2Ca}{\lambda - A} + \frac{2C'b}{\lambda - A'} + \frac{2C''c}{\lambda - A''} = 0.$$ [1]

Diese Gleichung gibt jede der die Cyklide doppelt berührenden Kugeln oder, anders ausgedrückt, stellt die Gleichung der variablen Kugel dar, wofern nur λ eine Wurzel der Gleichung 3 ist und a, b, c der Bedingung 4 genügen. Ferner ergibt sich die Gleichung der Direktorkugel als:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2Cx}{\lambda - A} - \frac{2C'y}{\lambda - A'} - \frac{2C''z}{\lambda - A''} - 2\lambda = 0,$$

wenn wieder λ, a, b, c den angegebenen Bedingungsgleichungen genügen. Auf Grund vorstehender Resultate kann man also sagen: Eine Cyklide kann im allgemeinen in fünffacher Weise als die Enveloppe einer Serie von Kugeln aufgefaßt werden, welche eine vorgegebene Kugel rechtwinklig schneiden und deren Mittelpunkte eine feste Fläche zweiten Grades erfüllen. Abgesehen von obiger Darstellungsweise läßt sich die Gleichung der Cyklide unter Anwendung pentasphärischer Koordinaten auch schreiben:

---

[1]) In dieser Gleichung ist bei Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (pag. 115) vermutlich infolge eines Druckversehens bei den letzten drei Gliedern ein — statt einem + gesetzt; in der folgenden Gleichung (Gleichung der Direktorkugel) sind umgekehrt an jener Stelle die drei vorletzten Glieder mit einem + statt mit einem — versehen.

8. $$\sum_{i=1}^{5} \frac{X_i^2}{\lambda - a_i} = 0, \text{ wenn } X_i = \frac{S_i}{r_i}$$ [1])

gesetzt ist. Hiebei bedeuten S_i die Potenzen eines Punktes in bezug auf die fünf Orthogonalkugeln. Gleichung 8 stellt ein System konfokaler Cykliden dar, für λ als variablen Parameter. Der Koeffizient von λ^4, welcher in der vorstehenden Gleichung nach Beseitigung der Nenner auftritt und gleich null sein muß, gibt zwischen den fünf Potenzen eines Punktes in bezug auf die fünf Orthogonalkugeln die Identität:

$$\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{S_i}{r_i}\right)^2 = 0.$$

Es soll nun Gegenstand der folgenden Arbeit sein, zu untersuchen, welche Flächen solchen Cykliden in der „Nicht-euklidischen Geometrie“ entsprechen, und im Anschluß daran sind einige Probleme zu behandeln, welche das Wesen dieser Flächen und insbesondere ihr Verhalten hinsichtlich der relativen Lage zur Fundamentalfläche erkennen lassen.

Zu diesem Zwecke wurden die in der von Herrn und Frau Professor Lindemann herausgegebenen deutschen Übersetzung des Werkes von Poincaré[2]) angegebenen Transformationsformeln benutzt, welche einen Punkt ξ, η, ζ eines nicht-euklidischen Raumes so abbilden, daß alle Punkte des ersteren in die Punkte des euklidischen „Halbraumes“ übergeführt werden, der durch die Bedingung $z > 0$ dargestellt wird. Diese Formeln lauten, wenn speziell $\alpha = \beta = \gamma = \varkappa$ gesetzt wird:

9. $$x = \frac{\xi}{\zeta}; \quad y = \frac{\eta}{\zeta}; \quad z = \frac{1}{\zeta}\sqrt{\varkappa^2\zeta^2 + 2\varkappa\zeta - \xi^2 - \eta^2}$$

wobei:

10. $$\Omega \equiv \varkappa^2\zeta^2 + 2\varkappa\zeta - \xi^2 - \eta^2 = 0$$

die Fundamentalfläche darstellt. Eine Kugel mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2$$

---

[1]) Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, pag. 134.

[2]) Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, deutsch von F. und L. Lindemann, pag. 258 (zweite Auflage 1906).

geht vermöge der Transformationsformeln über in:

$$11. \qquad \varkappa^2 (1 + u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta)^2 = c^2 \Omega,$$

wenn zur Abkürzung:

$$12. \qquad u_0 = -\frac{a}{\varkappa}; \quad v_0 = -\frac{b}{\varkappa}; \quad w_0 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \varkappa^2 - r^2}{2\varkappa}$$

gesetzt ist. Gleichung 11 stellt eine Fläche dar, welche die Fundamentalfläche 10 längs ihres Schnittes mit der Ebene:

$$u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta + 1 = 0$$

berührt und von der zweiten Ordnung ist; dies ist aber eine Kugel im Sinne der nicht-euklidischen Geometrie. Kugeln gehen also wieder in Kugeln über; Kugeln jedoch, welche die $x\,y$ Ebene rechtwinklig schneiden, d. h. deren Mittelpunkte in der $x\,y$ Ebene liegen, gehen in Ebenen über. Ferner ersieht man leicht, daß einer Ebene eine Kugel, einer Geraden als Schnitt zweier Ebenen ein Kreis als Schnitt zweier den Ebenen entsprechenden Kugeln, einem Kreis, der die $x\,y$ Ebene rechtwinklig schneidet, eine Gerade, einem Winkel wieder ein gleicher Winkel entspricht. In der erwähnten deutschen Übersetzung des Werkes von Poincaré sind diese Beziehungen weiter ausgeführt.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit empfing ich von Herrn Universitätsprofessor Dr. F. Lindemann, dem ich hiefür sowohl, wie für die vielfache, wohlwollende Unterstützung während der Ausführung zu wärmstem Danke verpflichtet bin.

I. Anwendung der Transformationsformeln auf die Cyklidengleichung.

Die Gleichung der Cyklide in ihrer einfachsten Gestalt ist bereits in der Einleitung als Gleichung 2 angeführt. Durch Anwendung der ebenfalls in der Einleitung unter 9 aufgeführten Transformationsformeln auf diese Gleichung ergibt sich (wenn wieder $\Omega = 0$ die Fundamentalfläche darstellt):

$$[4(A-A'')\xi^2+4(A'-A'')\eta^2+(4A''\varkappa^2+4D+\varkappa^4)\zeta^2+8C\xi\zeta \\ +8C'\eta\zeta+(8A''\varkappa+4\varkappa^3)\zeta+4\varkappa^2]^2=64C''^2\zeta^2\Omega.$$

Man erkennt unschwer, daß diese neue Fläche den Schnitt mit der Ebene $\zeta = 0$ zur Doppelkurve hat und zwar lautet die Gleichung des Doppelkegelschnittes:

$$(A-A'')\xi^2+(A'-A'')\eta^2+4\varkappa^2=0.$$

Hätte man die Gleichung einer zum gewählten Koordinatensystem beliebig orientierten Cyklide zu Grunde gelegt, so wäre jener Schnitt nach einer Doppelkurve eben nicht durch die spezielle Ebene $\zeta = 0$ erfolgt, sondern vielmehr durch eine allgemein orientierte Ebene. Dies zeigt sofort eine Anwendung der Transformationsformeln auf Gleichung 1) der Einleitung. Denkt man sich die dort auftretenden beiden Polynome u_1 und u_2 in folgender Gestalt gegeben:

$$u_1 = ax+by+cz$$
$$u_2 = a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x \\ +2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44},$$

so ergibt sich als entsprechende Fläche des nicht-euklidischen Raumes:

$$[(a_{11}-a_{33})\xi^2+2a_{12}\xi\eta+(a_{22}-a_{33})\eta^2+2(a\varkappa^2+a_{14})\xi\zeta+ \\ 2(b\varkappa^2+a_{24})\eta\zeta+(a_{44}+\varkappa^2a_{33}+\varkappa^4)\zeta^2+4a\varkappa\xi+4b\varkappa\eta+ \\ 2\varkappa(a_{33}+2\varkappa^2)\zeta+4\varkappa^2]^2=4(a_{13}\xi+a_{23}\eta+(a_{34}+c\varkappa^2)\zeta \\ +2\varkappa c)^2\Omega$$

Im folgenden sollen nun diese nicht-euklidischen Flächen mit Doppelkegelschnitt, welche, wie man sieht, ebenfalls von der vierten Ordnung sind, mit dem Namen „Nicht-euklidische Cykliden“ bezeichnet werden. Es wird sich im Verlauf der Untersuchung dieser Flächen zeigen, daß dieselben ganz analoge Eigenschaften aufweisen wie die gewöhnlichen Cykliden.

Bevor jedoch an eine eigentliche Untersuchung der Beschaffenheit dieser Flächen gegangen werden kann, ist es zunächst nötig, die Transformation selbst genauer zu studieren.

II. Erhaltung der rechten Winkel durch die Transformation.

Eine Cyklide war definiert als Enveloppe einer variablen Kugel, welche eine feste Kugel stets orthogonal schneidet und deren Mittelpunkt eine Fläche zweiten Grades beschreibt. Wie schon in der Einleitung erwähnt, gehen Kugeln durch die Transformation wieder in Kugeln über, ebenso entsprechen Winkeln wieder Winkel, und zwar läßt sich aus den Ausführungen in dem Buche von Poincaré, auf welche am Schlusse der Einleitung verwiesen wurde, entnehmen, daß Winkel sogar in gleiche Winkel übergehen. An dieser Stelle soll dies jedoch nur für den Fall, daß rechte Winkel vorliegen, ausführlich gezeigt werden. Zu diesem Zwecke mögen der Einfachheit halber zwei Kugeln gewählt werden, deren Mittelpunkte in der xy Ebene gelegen sind und welche somit bei der Transformation in Ebenen übergehen. Seien:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + z^2 = r_1^2$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + z^2 = r_2^2$$

die beiden Kugeln und führt man noch die Bedingung ein, daß sich dieselben orthogonal schneiden, so gilt:

13. $$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Transformiert man diese beiden Kugeln, so erhält man die Ebenen:

$$u_1 \xi + u_2 \eta + u_3 \zeta + 1 = 0$$
$$v_1 \xi + v_2 \eta + v_3 \zeta + 1 = 0$$

wobei: $u_1 = -\frac{a_1}{\varkappa}$; $u_2 = -\frac{b_1}{\varkappa}$; $u_3 = \frac{a_1^2 + b_1^2 + \varkappa^2 - r_1^2}{2\varkappa}$ und:

$$v_1 = -\frac{a_2}{\varkappa}; \quad v_2 = -\frac{b_2}{\varkappa}; \quad v_3 = \frac{a_2^2 + b_2^2 + \varkappa^2 - r_2^2}{2\varkappa}$$

gesetzt ist. Will man jetzt den Winkel beider Ebenen berechnen, so bedient man sich der Formel:

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{2k'}\right) = \frac{\Psi_{uv}^2}{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}.$$ [1])

Hier ist nun:

$$\Psi_{uu} = \varkappa^2(u_1^2 + u_2^2 + 1) - 2\varkappa u_3^2) = r_1^2$$

(indem man nämlich für u_1, u_2, u_3 aus den obigen Gleichungen ihre Werte einsetzt).

$$\Psi_{uv} = \frac{1}{2}[r_1^2 + r_2^2 - (a_1 + a_2)^2 - (b_1 + b_2)^2] = 0 \text{ (nach 13)}$$

$$\Psi_{vv} = r_2^2.$$

Es ergibt sich also:

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{2k'}\right) = 0 \text{ oder: } \left(\frac{\varphi}{2k'}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Hiemit ist der Beweis wenigstens für rechte Winkel ausführlich gegeben. Bis jetzt ist also erwiesen, daß die der Cyklide entsprechende Fläche ebenfalls die Enveloppe einer variablen nicht-euklidischen Kugel ist, welche eine feste Kugel stets orthogonal schneidet. Zunächst ist nun zu untersuchen, was der zweiten Bedingung entspricht, daß nämlich der Mittelpunkt der variablen Kugel eine Fläche zweiten Grades beschreibt.

III. Beziehungen zwischen den Mittelpunkten einer euklidischen und der durch Transformation entsprechenden nicht-euklidischen Kugel.

Eine Kugel mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

geht bei der Transformation über in:

14. $$\varkappa^2(1 + u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta)^2 = c^2\Omega,$$

wobei:

---

[1]) Clebsch-Lindemann II. Band pag. 475 und 497.

[2]) Poincaré, deutsche Ausgabe pag. 260.

$$u_0 = -\frac{a}{\varkappa};\ v_0 = -\frac{b}{\varkappa};\ w_0 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \varkappa^2 - r^2}{2\varkappa}$$

gesetzt ist. Der Mittelpunkt der nicht-euklidischen Kugel ist der Pol der Ebene:

15. $$1 + u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta = 0$$

in bezug auf Ω. Seien A_1, B_1, C_1 die Koordinaten dieses Poles, so lautet die Gleichung der Polarebene von (A_1, B_1, C_1) in bezug auf Ω:

$$(\varkappa\zeta + 1)(\varkappa C_1 + 1) - A_1\xi - B_1\eta - 1 = 0.$$

Dieselbe Polarebene ist aber durch die Gleichung 15 gegeben. Durch Vergleichung folgt:

16a) $a = \frac{A_1}{C_1}$; b) $b = \frac{B_1}{C_1}$; $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \varkappa^2 - r^2}{2} = \frac{\varkappa^2 C_1 + \varkappa}{C_1}$

oder durch Substitution:

$$\frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{B_1^2}{C_1^2} + c^2 + \varkappa^2 - r^2 = \frac{2\varkappa^2 C_1 + 2\varkappa}{C_1} \quad \text{oder:}$$

16c) $$c = \frac{1}{C_1}\sqrt{\varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2 + r^2 C_1^2}.$$

Man hat nun drei Relationen, die angeben, inwiefern der Punkt (a, b, c) mit dem Punkt (A_1, B_1, C_1) verknüpft ist. Man erkennt aus diesen Beziehungen, daß, wie von vornherein zu vermuten war, dem Mittelpunkte der ursprünglichen Kugel nicht wieder der Mittelpunkt der zugehörigen nicht-euklidischen Kugel entspricht.

Es soll nun zunächst noch eine Relation hergestellt werden, welche den Radius der ursprünglichen Kugel mit dem der entsprechenden im nicht-euklidischen Raum verbindet. Die Gleichung einer Kugel mit dem Mittelpunkt (A_1, B_1, C_1) kann in der nicht-euklidischen Geometrie auch geschrieben werden:

17. $$\cos\left(\frac{R}{2ki}\right)^2 \Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_1A_1} - \Omega_{\xi A_1}^2 = 0,$$

wenn im Anschluß an die Bezeichnungsweise von Clebsch-Lindemann:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\xi\xi} &= \varkappa^2\zeta^2 + 2\varkappa\zeta - \xi^2 - \eta^2 \\
\Omega_{A_1A_1} &= \varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2 \\
\Omega_{A_1\xi} &= \varkappa^2 C_1\zeta + \varkappa(C_1 + \zeta) - A_1\xi - B_1\eta
\end{aligned}$$

gesetzt ist ($\Omega_{\xi\xi}$ wurde im vorigen Kapitel mit Ω schlechthin bezeichnet). Gleichung 17 kann also auch geschrieben werden:

$$\frac{\varkappa^2 C_1 \zeta + \varkappa (C_1 + \zeta) - A_1 \xi - B_1 \eta}{\cos\left(\frac{R}{2ki}\right)\sqrt{\varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2}} = \sqrt{\Omega_{\xi\xi}}.$$

Nach früherem ist aber die Gleichung einer nicht-euklidischen Kugel auch gegeben durch:

$$\frac{\varkappa}{c} - \frac{a}{c}\xi - \frac{b}{c}\eta + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \varkappa^2 - r^2}{2c} = \sqrt{\Omega_{\xi\xi}}.$$

Durch Vergleichung folgt:

18a) $$\frac{A_1}{\cos\left(\frac{R}{2ki}\right)\sqrt{\varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2}} = \frac{a}{c};$$

18b) $$\frac{B_1^2}{\cos\left(\frac{R}{2ki}\right)\sqrt{\varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2}} = \frac{b}{c}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen 16a) und c) ergibt sich aus 18a) folgendes:

19. $$\cos\left(\frac{R}{2ki}\right)\sqrt{\varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2} = \frac{A_1 c}{a} = C_1 c$$
$$= \sqrt{\varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2 + r^2 C_1^2}.$$

Nach erfolgter Erhebung ins Quadrat und kurzer Umrechnung ergibt sich schließlich für r die folgende Formel:

20. $$r = \frac{i}{C_1} \sin\left(\frac{R}{2ki}\right)\sqrt{\varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2}$$

oder in anderer Schreibweise unter Berücksichtigung der Gleichung 19:

$$\frac{r}{c} = i \operatorname{ctg}\left(\frac{R}{2ki}\right).$$

Zum Schlusse sei noch gefragt, welche Bedeutung der durch die Transformation dem Mittelpunkt der ursprünglichen Kugel entsprechende Punkt im nicht-euklidischen Raum hat und umgekehrt, welcher Punkt dem Mittelpunkt der nicht-euklidischen Kugel im ursprünglichen euklidischen Raume entspricht.

Es seien a, b, c wieder die Koordinaten des Mittelpunktes der ursprünglichen, A_1, B_1, C_1 die des Mittelpunktes der nicht-euklidischen

Kugel; dann gelten die Beziehungen 16. Es habe nun der dem Punkt A_1, B_1, C_1 im euklidischen Raume entsprechende Punkt die Koordinaten α, β, γ, so gilt:

$$A_1 = \frac{2\varkappa\alpha}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\varkappa^2} \qquad C_1 = \frac{2\varkappa}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\varkappa^2}.$$

$$B_1 = \frac{2\varkappa\beta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\varkappa^2}$$

Hieraus ergibt sich durch Division je zweier Gleichungen $\frac{A_1}{C_1} = a$; $\frac{B_1}{C_1} = \beta$; nach 16 ist aber: $\frac{A_1}{C_1} = a$; $\frac{B_1}{C_1} = b$ d. h.:

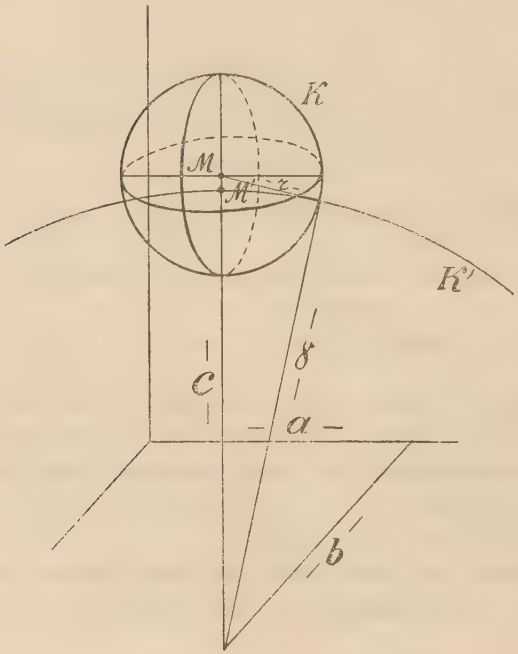
$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha \\ b &= \beta \end{aligned}\right\} \text{ oder in Worten:}$$

Die Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) liegen auf ein und demselben Lot zur xy Ebene. Substituiert man dieses Resultat in 16 c) unter Berücksichtigung von 16 a) und 16 b), so kommt:

$c^2 C_1^2 = r^2 C_1^2 + \varkappa^2 C_1^2 + 2\varkappa C_1 - a^2 C_1^2 - \beta^2 C_1^2$ oder:

$\frac{2\varkappa}{C_1} = c^2 + a^2 + \beta^2 - r^2 - \varkappa^2 =$ (nach obigem) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varkappa^2$ d. h.:

$$\gamma = \sqrt{c^2 - r^2}.$$



Man kann dieses Resultat folgendermaßen ausdrücken: Schneidet man die gegebene Kugel $K(a, b, c)$ mit einer zweiten Kugel $(K' \alpha, \beta, \gamma)$ deren Radius derart beschaffen ist, daß sie die gegebene orthogonal trifft, so schneidet letztere auf der Centrale jenen Punkt aus, welcher das Centrum der nicht-euklidisch entsprechenden Kugel liefert. In der beigefügten Skizze ist M der Mittelpunkt der gegebenen Kugel K und M'

(a, b, γ) jener Punkt, welcher bei der Transformation zum Mittelpunkt wird.

Seien a, b, c wieder die Koordinaten des Mittelpunktes der ursprünglichen Kugel, λ, μ, ν die des durch Transformation entsprechenden Punktes im nicht-euklidischen Raum, so gilt:

$$a = \frac{\lambda}{\nu}; \quad b = \frac{\mu}{\nu}; \quad c = \frac{1}{\nu}\sqrt{\varkappa^2\nu^2 + 2\varkappa\nu - \mu^2 - \lambda^2}$$

Vermöge 16) kommt:

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{\lambda}{\nu}; \quad \frac{B_1}{C_1} = \frac{\mu}{\nu}; \quad \frac{1}{C_1}\sqrt{r^2C_1^2 + \varkappa^2C_1^2 + 2\varkappa C_1 - A_1^2 - B_1^2} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\varkappa^2\nu^2 + 2\varkappa\nu - \mu^2 - \lambda^2}.$$

Mit Hilfe der beiden ersten Gleichungen ergibt die dritte das einfache Resultat:

$$\nu = \frac{2\varkappa C_1}{r^2 C_1 + 2\varkappa}$$

und somit gilt:

$$\lambda = \frac{2\varkappa A_1}{r^2 C_1 + 2\varkappa}; \quad \mu = \frac{2\varkappa B_1}{r^2 C_1 + 2\varkappa}; \quad \nu = \frac{2\varkappa C_1}{r^2 C_1 + 2\varkappa},$$

oder kurz, wenn:

$$\frac{2\varkappa}{r^2 C_1 + 2\varkappa} = D_1$$

gesetzt wird:

$$\lambda = A_1 D_1; \quad \mu = B_1 D_1; \quad \nu = C_1 D_1.$$

Man hat also:

$$\lambda : \mu : \nu = A_1 : B_1 : C_1.$$

Durch diese Gleichungen sind nun auch die Beziehungen zwischen λ, μ, ν und $A_1\ B_1\ C_1$ festgelegt.

IV. Die Nicht-euklidische Deferente.

Durch die Formeln in Kapitel III war eine Beziehung zwischen a, b, c und $A_1\ B_1\ C_1$ hergestellt. Um die Gleichung der nicht-euklidischen Deferente zu erhalten, ist zu beachten, daß die Deferente der Ort der Mittelpunkte der die Cyklide erzeugenden Kugeln ist (oder, anders ausgedrückt, die von dem Mittelpunkt der variablen Kugel beschriebene Fläche). Würde man nun einfach die Gleichung 7, welche die Deferente der ursprünglichen Cyklide, darstellt, der Transformation unterwerfen, so erhielte man:

$$\frac{A-A''}{\lambda-A}\xi^2+\frac{A'-A''}{\lambda-A'}\eta^2+(\varkappa^2-\lambda+A')\zeta^2+2\varkappa\zeta=0.$$

Dies wäre aber eine Fläche zweiten Grades, welche den Ort jener Punkte darstellt, die im nicht-euklidischen Raume den Mittelpunkten der ursprünglichen Kugeln entsprechen. Um die Gleichung der nicht-euklidischen Deferente selbst zu erhalten, d. h. den Ort der Mittelpunkte der nicht-euklidischen Kugeln, welche die Fläche erzeugen, verfährt man folgendermaßen: [Um Irrtümer zu vermeiden, ist im folgenden an Stelle der Bezeichnungsweise a, b, c und A_1, B_1, C_1 für die Koordinaten der Mittelpunkte entsprechender Kugeln x_1, y_1, z_1 und ξ_1, η_1, ζ_1 gesetzt und werden auch die aus früheren Kapiteln zitierten Formeln in dieser Schreibweise angeführt]. Zwischen den x_1, y_1, z_1 besteht die Relation:

$$\frac{x_1^2}{\lambda-A}+\frac{y_1^2}{\lambda-A'}+\frac{z_1^2}{\lambda-A''}=1.$$

Ferner gilt nach 16.:

$$21.\quad x_1=\frac{\xi_1}{\zeta_1};\quad y_1=\frac{\eta_1}{\zeta_1};\quad z=\frac{1}{\zeta_1}\sqrt{\varkappa^2\zeta_1^2+2\varkappa\zeta_1-\xi_1^2-\eta_1^2+r^2\zeta_1^2}.$$

Substituiert man für x_1, y_1, z_1 die entsprechenden Werte, so kommt:

$$22\,a)\quad \frac{A-A''}{\lambda-A}\xi_1^2+\frac{A'-A''}{\lambda-A'}\eta_1^2+(\varkappa^2-\lambda+A'')\zeta_1^2+2\varkappa\zeta_1+r^2\zeta_1^2=0.$$

Dies ist eine Relation zwischen ξ_1, η_1, ζ_1 und r; um r zu entfernen, bedient man sich der Relation 5 in Verbindung mit 6:

$$r^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2-2\lambda-2\frac{Cx_1}{\lambda-A}-2\frac{C'y_1}{\lambda-A'}-2\frac{C''z_1}{\lambda-A''}.$$

Wendet man hierauf die Formeln 16 ebenfalls an, so kommt:

$$22\,b)\quad \frac{2C\xi_1}{\lambda-A}+\frac{2C\eta_1}{\lambda-A'}+(2\lambda-\varkappa^2)\zeta_1-2\varkappa=-\frac{2C''}{\lambda-A''}\sqrt{\varkappa^2\zeta_1^2+2\varkappa\zeta_1+r^2\zeta_1^2-\xi_1^2-\eta_1^2}.$$

Die Elimination von r aus 22 a) und 22 b) ergibt:

$$\left(\frac{2C}{\lambda-A}\xi_1+\frac{2C'}{\lambda-A'}\eta_1+(2\lambda-\varkappa^2)\zeta_1-2\varkappa\right)^2=\frac{4C''^2}{\lambda-A''}\left(\frac{\xi_1^2}{A-\lambda}+\frac{\eta_1^2}{A'-\lambda}+\zeta_1^2\right).$$

Dies ist nun eine Relation zwischen den ξ_1, η_1, ζ_1 allein, d. h.: die Gleichung stellt den Ort aller Mittelpunkte der die nicht-euklidische Fläche erzeugenden Kugeln dar. Setzt man jetzt allgemein

an Stelle von ξ_1, η_1, ζ_1 die Variablen ξ, η, ζ, so ergibt sich als Gleichung der nicht-euklidischen Deferente:

$$\left(\frac{2C}{\lambda-A}\xi+\frac{2C'}{\lambda-A'}\eta+(2\lambda-\varkappa^2)\zeta-2\varkappa\right)^2+\frac{4C''^2}{\lambda-A''}\left(\frac{\xi^2}{\lambda-A}+\frac{\eta^2}{\lambda-A'}-\zeta^2\right)=0$$

und zwar ist dieselbe, wie man sieht, wieder vom zweiten Grade.

V. Die nicht-euklidische Cyklide.

Eine Cyklide kann definiert werden als Enveloppe einer Serie von Kugeln, welche alle orthogonal zu einer festen Kugel bleiben und deren Mittelpunkte eine Fläche zweiten Grades erfüllen. Man sieht nun aus dem Vorhergegangenen: Kugeln gehen bei der Transformation wieder in Kugeln über; die Bedingung, daß alle Kugeln ein und dieselbe feste Kugel orthogonal schneiden, bleibt erhalten. Für die eigentliche nicht-euklidische Deferente ergab sich ferner ebenfalls eine Fläche zweiten Grades. Doch ist hier noch folgendes zu bemerken. Eine beliebig im Raum orientierte Fläche zweiten Grades geht, wie leicht ersichtlich, bei der Transformation in eine Fläche vierten Grades über; ist dieselbe jedoch auf ihre Hauptaxen bezogen oder fehlt doch wenigstens in der Gleichung das Glied mit z in der ersten Potenz, so entspricht ihr im nicht-euklidischen Raum eine Fläche zweiten Grades. Dies kommt daher, daß die Ebene $z=0$ bei den zu Grunde gelegten Transformationsformeln eine ausgezeichnete Stellung einnimmt (Siehe Einleitung). Es könnte nun auf den ersten Blick scheinen, als ob die Deferente im nicht-euklidischen Raum nur deshalb wieder vom zweiten Grade würde, weil die ursprüngliche Cyklide speziell so orientiert war, daß die Deferente auf ihre Hauptaxen bezogen erschien; denn wenn schon die nicht-euklidische Deferente sich nicht durch bloße Transformation aus der euklidischen Deferente ableiten ließ, so spielte immerhin die ursprüngliche euklidische Deferente hinsichtlich ihrer Gleichungsform bei dem im vorigen Kapitel angegebenen Verfahren eine gewisse Rolle. Es soll daher noch ausführlich gezeigt werden, wie die Gleichung der nicht-euklidischen Deferente beschaffen ist für den Fall, daß im euklidischen Raum eine allgemein orientierte Deferente vorliegt. Sei die Gleichung der letzteren gegeben in der Form:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

und die Direktorkugel durch folgende Gleichung festgelegt:

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 = R^2.$$

Ist die die Fläche erzeugende variable Kugel endlich durch die Gleichung gegeben:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2,$$

wobei x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des variablen Mittelpunktes sind, so schreibt sich die Bedingung dafür, daß diese variable Kugel die Direktorkugel stets unter rechtem Winkel schneidet, folgendermaßen:

23. $$(x_1 - A)^2 + (y_1 - B)^2 + (z - C)^2 = R^2 + r^2.$$

Denkt man sich nun die obige Fläche zweiten Grades, welche ja der Punkt x_1, y_1, z durchläuft, in den x_1, y_1, z_1 statt in den x, y, z geschrieben und wendet auf sie die Formeln 21 des vorigen Kapitels an, so kommt:

24. $$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\eta_1 + a_{22}\eta_1^2 + 2a_{14}\xi_1\zeta_1 + 2a_{24}\eta_1\zeta_1 + a_{44}\zeta_1^2 + a_{33}(\varkappa^2\zeta_1^2 + 2\varkappa\zeta_1 - \xi_1^2 - \eta_1^2 + r^2\zeta_1^2) = -2(a_{13}\xi_1 + a_{23}\eta_1 + a_{34}\zeta_1)\sqrt{\varkappa^2\zeta_1^2 + 2\varkappa\zeta_1 - \xi_1^2 - \eta_1^2 + r^2\zeta_1^2}.$$

Um das in dieser Gleichung enthaltene r zu entfernen, wendet man dieselben Formeln auch auf Gleichung 23 an und erhält:

25. $$2A\xi_1 + 2B\eta_1 + (R^2 - A^2 - B^2 - C^2 - \varkappa^2)\zeta_1 - 2\varkappa = -2C\sqrt{\varkappa^2\zeta_1^2 + 2\varkappa\zeta_1 - \xi_1^2 - \eta_1^2 + r^2\zeta_1^2}$$

und indem man für die auf der linken Seite stehende Klammer und für die rechts stehende Wurzel aus Gleichung 25 in Gleichung 24 substituiert, ergibt sich, wenn man zugleich statt ξ_1, η_1, ζ_1 wieder allgemein ξ, η, ζ setzt:

$$4C^2(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2a_{14}\xi\zeta + 2a_{24}\eta\zeta + a_{44}\zeta^2) + a_{33}[2A\xi + 2B\eta + (R^2 - A^2 - B^2 - C^2 - \varkappa^2)\zeta - 2\varkappa]^2 = 4C(a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{34}\zeta)[2A\xi + 2B\eta + (R^2 - A^2 - B^2 - C^2 - \varkappa^2)\zeta - 2\varkappa]$$

als Gleichung der nicht-euklidischen Deferente und zwar ist dieselbe, wie man sieht, wiederum vom zweiten Grade. Hiemit ist gezeigt, daß die nicht-euklidische Deferente stets vom zweiten Grade sein muß.

Die Definitionen für entsprechende Flächen können sonach geschrieben werden:

im euklidischen Raum:

Eine beliebige Cyklide ist definiert als die Enveloppe einer Serie von Kugeln, welche eine feste Kugel stets orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte eine Fläche zweiten Grades beschreiben.

im nicht-euklidischen Raum:

Eine nicht-euklidische Cyklide ist definiert als die Enveloppe einer Serie nicht-euklidischer Kugeln, welche eine feste nicht-euklidische Kugel in nicht-euklidischem Sinne orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte eine Fläche zweiten Grades beschreiben.

In der Einleitung war nun bereits darauf hingewiesen, daß eine Cyklide, auf ein pentasphärisches Koordinatensystem bezogen (d. h. auf ein System von fünf wechselseitig orthogonalen Kugeln) hinsichtlich ihrer Gleichung eine besonders einfache Form annimmt. Um nun in der nicht-euklidischen Geometrie ein Analogon für diese pentasphärischen Koordinaten zu finden, ist es nötig, zunächst den Begriff der Potenz zu übertragen.

VI. Die Potenz in der nicht-euklidischen Geometrie.

Die transformierte Kugelgleichung lautete:

$$\varkappa^2 (1 + u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta)^2 = c^2 \Omega,$$

wobei die u_0, v_0, w_0, die in Gleichung 14 (Kapitel III) erläuterten Werte darstellen. Sei ξ_0, η_0, ζ_0 ein auf der Kugel gelegener Punkt, so ist obige Gleichung natürlich für denselben erfüllt, d. h. es gilt:

$$26. \quad \varkappa^2 (1 + u_0 \xi_0 + v_0 \eta_0 + w_0 \zeta_0)^2 = c^2 (\varkappa^2 \zeta_0^2 + 2 \varkappa \zeta_0 - \xi_0^2 - \eta_0^2).$$

Die Tangentialebene in diesem Punkte an die Kugel wird sein:

$$27. \quad \varkappa^2 (1+u_0\xi+v_0\eta+w_0\zeta)(1+u_0\xi_0+v_0\eta_0+w_0\zeta_0) = c^2 [\varkappa^2\zeta\zeta_0+\varkappa(\zeta+\zeta_0)-\xi\xi_0-\eta\eta_0].$$

Der Abstand d der beiden Punkte x, y, z und ξ_0, η_0, ζ_0 ist aber gegeben durch die Formel:

$$\sin^2\left(\frac{d}{2ki}\right) = \frac{\Omega_{xx}\,\Omega_{\xi_0\xi_0} - \Omega^2_{x\xi_0}}{\Omega_{xx}\,\Omega_{\xi_0\xi_0}}$$ [1])

[1]) Clebsch-Lindemann II. Band pag. 470 u. 496.

oder, für $\Omega_{x\,x}$, $\Omega_{\xi_0\,\xi_0}$ und $\Omega_{x\,\xi_0}$ die ausführlichen Werte geschrieben:

$$\sin^2\left(\frac{d}{2ki}\right) =$$

$$\frac{(k^2 z + 2\varkappa z - x^2 - y^2)\,(\varkappa^2\zeta_0^2 + 2\varkappa\zeta_0 - \xi_0^2 - \eta_0^2) - (\varkappa^2 z\zeta_0 + \varkappa z + \varkappa\zeta_0 - x\xi_0 - y\eta_0)^2}{(\varkappa^2 z^2 + 2\varkappa z - x^2 - y^2)\,(\varkappa^2\zeta_0^2 + 2\varkappa\zeta_0 - \xi_0^2 - \eta_0^2)}.$$

Durch Substitution aus 26, 27 und 28 in obige Gleichung ergibt sich nach einiger Umformung:

$$\cos^2\left(\frac{d}{2ki}\right) = \frac{\varkappa^2(1 + u_0 x + v_0 y + w_0 z)^2}{c^2(\varkappa^2 z^2 + 2\varkappa z - x^2 - y^2)}.$$

Setzt man jetzt statt des beliebig gewählten Punktes x, y, z allgemein ξ, η, ζ, so ergibt sich für die nicht-euklidische Kugel folgender Satz:

Ist d die Länge der Tangente vom Berührungspunkte gemessen bis zu einem auf der Tangente liegenden Punkte ξ, η, ζ, so besteht die Relation:

29. $$\cos^2\left(\frac{d}{2ki}\right) = \frac{\varkappa^2}{c^2}(1 + u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta)^2\,\frac{1}{\Omega_{\xi\,\xi}}.$$

Diese Formel läßt sich auch noch anders schreiben. Die Gleichung der Kugel ist einerseits gegeben durch:

$$\frac{\varkappa^2}{c^2}(1 + u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta)^2 = \Omega_{\xi\,\xi},$$

andrerseits aber auch, wenn wieder die Koordinaten des Mittelpunktes mit A_1, B_1, C_1 bezeichnet werden, durch:

$$\frac{\Omega_{A_1\,\xi}^2}{\Omega_{A_1\,A_1}\cos^2\left(\frac{R}{2ki}\right)} = \Omega_{\xi\,\xi}.$$

Da die rechten Seiten dieselben sind, müssen auch die linken Seiten sich decken; durch Vergleichung folgt also:

$$\frac{\varkappa^2}{c^2}(1 + u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta) \equiv \frac{\Omega_{A_1\,\xi}^2}{\Omega_{A_1\,A_1}\cos^2\left(\frac{R}{2ki}\right)}.$$

Substituiert man dieses Resultat in Gleichung 29, so ergibt sich:

30. $$\cos^2\left(\frac{d}{2ki}\right) = \frac{\Omega^2{}_{A_1\,\xi}}{\Omega_{\xi\,\xi}\,\Omega_{A_1\,A_1}\cos^2\left(\frac{R}{2ki}\right)}$$

als Formel für die Potenz d^2 eines Punktes in bezug auf eine Kugel. Diese letztere Formel hätte sich auch direkt ergeben, wenn man der Untersuchung die Kugelgleichung in der zweiten Gestalt von Anfang an zu Grunde gelegt hätte. Zugleich geht aus dieser letzten Formel hervor, daß auch in der nicht-euklidischen Geometrie die Tangente an einem beliebigen Kugelpunkt senkrecht auf dem nach diesem Punkte gezogenen Radius steht. Bezeichnet man nämlich den Abstand des Punktes ξ, η, ζ vom Mittelpunkt der Kugel mit m, so gilt:

$$\cos^2\left(\frac{m}{2ki}\right) = \frac{\Omega^2_{A_1\xi}}{\Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_1A_1}}$$

Substituiert man dies in Gleichung 30, so kommt:

$$\cos^2\left(\frac{d}{2ki}\right)\cos^2\left(\frac{R}{2ki}\right) = \cos^2\left(\frac{m}{2ki}\right).$$

Diese Gleichung besagt aber, daß in dem aus den Seiten d, R und m gebildeten Dreieck der Seite m ein rechter Winkel gegenüberliegt.[1]) Man erhält, wie aus obigem hervorgeht, in der nicht-euklidischen Geometrie nicht die Größe d^2 selbst (in der euklidischen Geometrie wird bekanntlich das d^2 unter dem Namen Potenz verstanden) sondern die Funktion $\sin^2\left(\frac{d}{2ki}\right)$ respektive $\cos^2\left(\frac{d}{2ki}\right)$.

Zufolge den hier gefundenen Resultaten soll nun versucht werden, die nicht-euklidische Cyklide ebenfalls unter Zugrundelegung von fünf wechselseitig orthogonalen Kugeln, d. h. in nicht-euklidisch pentasphärischen Koordinaten darzustellen.

VII. Darstellung der nicht-euklidischen Cyklide in nicht-euklidisch pentasphärischen Koordinaten.

Die Gleichung der euklidischen Cyklide in pentasphärischen Koordinaten war nach Gleichung 8:

31. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{X_\nu}{\lambda - a_\nu} = 0, \quad \text{wenn } X_\nu = \frac{S_\nu}{r_\nu}$$

gesetzt ist, wobei S_ν die Potenzen eines Punktes in bezug auf die fünf Orthogonalkugeln mit den Radien r_ν ($\nu = 1, 2, \ldots 5$) sind, also:

$$S_\nu = x^2 + y^2 + z^2 - 2a_\nu x - 2b_\nu y - 2c_\nu z + a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 - r_\nu^2.$$

[1]) Clebsch-Lindemann II. Band pag. 483.

Mit Hilfe der Transformationsformeln 9 ergibt sich hieraus:

$$S_\nu = \frac{2}{\xi}\left[\varkappa(1 + u_\nu\xi + v_\nu\eta + w_\nu\zeta) - c_\nu\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}\right]$$

wobei wieder:

$$u_\nu = -\frac{a_\nu}{\varkappa};\quad v_\nu = -\frac{b_\nu}{\varkappa};\quad w_\nu = \frac{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 - r_\nu^2}{2\varkappa}$$

gesetzt ist. Substituiert man dies in Gleichung 31 so ergibt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\frac{4}{\zeta^2 r_\nu^2}\left[\varkappa(1 + u_\nu\xi + v_\nu\eta + w_\nu\zeta) - c_\nu\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}\right]^2}{\lambda - a_\nu} = 0.$$

Nach Gleichung 29 gilt nun:

$$\varkappa(1 + u_\nu\xi + v_\nu\eta + w_\nu\zeta) = c_\nu\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}\cos\left(\frac{d_\nu}{2ki}\right)\quad(\nu = 1, 2, \ldots 5).$$

Durch abermalige Substitution ergibt sich (wenn während der Umformung einstweilen der Zähler allein geschrieben wird):

$$\frac{4}{\zeta^2 r_\nu^2}\left(c_\nu\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}\cos^2\left(\frac{d}{2ki}\right) - c_\nu\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}\right)^2 = \frac{4c_\nu^2}{\zeta^2 r_\nu^2}\Omega_{\xi\xi}\left(\cos^2\left(\frac{d_\nu}{2ki}\right) - 1\right)^2$$

$$= \frac{4c_\nu^2}{\zeta^2 r_\nu^2}\Omega_{\xi\xi}\left(-2\sin^2\left(\frac{d_\nu}{2ki}\right)\right)^2 = \frac{16c_\nu^2}{\zeta^2 r_\nu^2}\Omega_{\xi\xi}\sin^4\left(\frac{d_\nu}{4ki}\right).$$

Läßt man noch den allen Gliedern gemeinsamen Zahlenfaktor weg, sowie den Faktor $\Omega_{\xi\xi}$, der ebenfalls aus der Summe herausgeht, und gleich null gesetzt, wieder die Gleichung der Fundamentalfläche liefert, so erhält man zunächst folgende Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\left(\frac{c_\nu}{r_\nu}\right)^2\sin^4\left(\frac{d_\nu}{4ki}\right)}{\lambda - a_\nu} = 0$$

(der allen Gliedern gemeinsame Faktor $\frac{1}{\xi^2}$ wurde ebenfalls weggelassen). Es war nun nach Gleichung 19:

$$c_\nu = \frac{1}{C_\nu}\cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)\sqrt{\varkappa^2 C_\nu^2 + 2\varkappa C_\nu - A_\nu^2 - B_\nu^2},$$

und nach Gleichung 20 galt:

$$r_\nu = \frac{i}{C_\nu}\sin\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)\sqrt{\varkappa^2 C_\nu^2 + 2\varkappa C_\nu - A_\nu^2 - B_\nu^2}.$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich bei gleichzeitig erfolgter Erhebung beider Seiten der Gleichung ins Quadrat:

$$\frac{c_\nu^2}{r_\nu^2} = -\operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right).$$

Setzt man dieses Resultat in die ursprüngliche Gleichung ein, indem man sich noch die ganze Gleichung mit (— 1) multipliziert denkt, so kommt:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)\sin^4\left(\frac{d_\nu}{4ki}\right)}{\lambda - a_\nu} = 0$$

oder, wenn man endlich, um für die nicht-euklidische Cyklidengleichung eine der euklidischen analoge Schreibweise zu erzielen:

$$\sin^2\left(\frac{d_\nu}{4ki}\right) = Z_\nu$$

setzt, so erhält man:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\Xi_\nu^2}{\lambda - a_\nu} = 0, \quad \text{wobei } \Xi_\nu = \frac{Z_\nu}{\operatorname{tg}\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}$$

gesetzt ist, als Gleichung der allgemeinen nicht-euklidischen Cyklide in nicht-euklidisch pentasphärischen Koordinaten. Entsprechend der analogen Relation im euklidischen Raume gilt hier, da der Koeffizient von λ^4 nach Beseitigung der Nenner identisch verschwindet:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \left(\frac{Z_\nu}{\operatorname{tg}\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}\right)^2 \equiv 0$$

oder, durch successive Substitution:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{(\cos\left(\frac{d_\nu}{2ki}\right)-1)^2}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = \sum_{\nu=1}^{5} \frac{\left[\Omega_{A_\nu\xi} - \sqrt{\Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_\nu A_\nu}}\cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)\right]^2 \cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)\Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{5} \frac{\Omega_{A_\nu\xi}^2 + \Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_\nu A_\nu}\cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right) - 2\cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)\Omega_{A_\nu\xi}\sqrt{\Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_\nu A_\nu}}}{\Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0.$$

Hier kann das im Nenner stehende $\Omega_{\xi\xi}$ wieder fortbleiben. Soll obiger Ausdruck nun verschwinden, so muß jeder der beiden folgenden Ausdrücke für sich verschwinden:

32. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\Omega_{A_\nu \xi}^2 + \Omega_{\xi\xi}\,\Omega_{A_\nu A_\nu} \cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} \equiv 0$$

und:

33. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right) \Omega_{A_\nu \xi} \sqrt{\Omega_{A_\nu A_\nu}}}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} \equiv 0$$

(indem hier wiederum $\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}$ aus der Summe herausgeht). Setzt man für $\Omega_{A_\nu \xi}$ und $\Omega_{\xi\xi}$ ihre Werte ein, so ergibt sich zunächst aus Gleichung 32:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{D_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)},$$

wobei:

$$D_\nu = [(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)\,\zeta^2 + A_\nu^2\,\xi^2 + B_\nu^2\,\eta^2 + \varkappa^2 C_\nu^2 - 2\,A_\nu\,(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)\,\xi\,\zeta$$
$$- 2\,B_\nu\,(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)\,\eta\,\zeta + 2\,(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)\,\varkappa\,C_\nu\,\zeta + 2\,A_\nu B_\nu\,\xi\,\eta - 2\,A_\nu C_\nu \varkappa\,\xi$$
$$- 2\,B_\nu C_\nu \varkappa\,\eta] + (\varkappa^2\zeta^2 + 2\,\varkappa\,\zeta - \xi^2 - \eta^2)\,\Omega_{A_\nu A_\nu} \cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)$$

ist. Da nun die Koeffizienten von $\xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\,\eta \ldots$ etc. für sich verschwinden müssen, so folgt:

34. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)^2 + \varkappa^2\,\Omega_{A_\nu A_\nu} \cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \zeta^2\text{)}$$

35. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{A_\nu^2 - \Omega_{A_\nu A_\nu} \cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \xi^2\text{)}$$

36. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{B_\nu^2 - \Omega_{A_\nu A_\nu} \cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \eta^2\text{)}$$

37. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{2A_\nu(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \xi\zeta\text{)}$$

38. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{2B_\nu(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \eta\zeta\text{)}$$

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{2A_\nu B_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \eta\xi\text{)}$$

39. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{2(\varkappa^2 C_\nu + \varkappa)\varkappa C_\nu + 2\varkappa\Omega_{A_\nu A_\nu}\cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \zeta\text{)}$$

40. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{2A_\nu C_\nu \varkappa}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \xi\text{)}$$

41. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{2B_\nu C_\nu \varkappa}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(Koeffizient von } \eta\text{)}$$

42. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\varkappa^2 C_\nu^2}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \quad \text{(konstantes Glied).}$$

Diese Relationen lassen sich noch bedeutend vereinfachen. Aus Gleichung 39 folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\varkappa^2 C_\nu^2}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} + \sum_{\nu=1}^{5} \frac{\varkappa C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = -\sum_{\nu=1}^{5} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)$$

und wegen Gleichung 42 kommt nur:

$$\varkappa \sum_{\nu=1}^{5} \frac{C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = -\sum_{\nu=1}^{5} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right).$$

Durch Subtraktion von 34 und 35 ergibt sich (indem man vorher mit den konstanten Faktoren wegdividiert hat):

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{\varkappa C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} + \sum_{\nu=1}^{5} \frac{1}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0$$

und indem man Gleichung 43 berücksichtigt, wird hieraus:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{1}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = \sum_{\nu=1}^{5} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right).$$

Aus Gleichung 37 folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{A_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = -\varkappa \sum_{\nu=1}^{5} \frac{A_\nu C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \text{ (infolge 40).}$$

Aus Gleichung 38 folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{B_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = -\varkappa \sum_{\nu=1}^{5} \frac{B_\nu C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \text{ (infolge 41).}$$

Ferner ergeben Gleichung 35 und 36 aufgelöst:

45. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{A_\nu^2}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = \sum_{\nu=1}^{5} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)$$

46. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{B_\nu^2}{\Omega_{A_\nu A_\nu} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = \sum_{\nu=1}^{5} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right).$$

Zur weiteren Vereinfachung dient folgender Kunstgriff. Addiert man zu Gleichung 42 die mit 2 multiziplierte Gleichung 43 sowie die beiden je mit (-1) multiplizierten Gleichungen 45 und 46, so ergibt der Zähler auf der linken Seite gerade $\Omega_{A_\nu A_\nu}$, welches auch im Nenner vorkommt und sich daher ganz forthebt. Man erhält also zunächst:

47. $$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = -4 \sum_{\nu=1}^{5} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right).$$

Beachtet man nun, daß:

$$\cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right) + \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right) = 1$$

ist, so ergibt sich folgendes:

$$-4\sum_{\nu=1}^{5}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)=\sum_{\nu=1}^{5}\frac{\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)+\cos^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}$$

$$=5+\sum_{\nu=1}^{5}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)$$

oder:

48. $$\sum_{\nu=1}^{5}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)=-1.$$

Setzt man aus dieser Gleichung in die Gleichungen 43, 44, 45, 46 und 47 ein, so erhält man die einzelnen Relationen in der einfachsten Gestalt. In der folgenden Tabelle sind dieselben übersichtlich zusammengestellt:

$$\sum_{\nu=1}^{5}\frac{A_\nu^2}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=-1 \qquad \sum_{\nu=1}^{5}\frac{A_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=0$$

$$\sum_{\nu=1}^{5}\frac{B_\nu^2}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=-1 \qquad \sum_{\nu=1}^{5}\frac{B_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=0$$

$$\sum_{\nu=1}^{5}\frac{C_\nu^2}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=0 \qquad \sum_{\nu=1}^{5}\frac{C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=0$$

$$\sum_{\nu=1}^{5}\frac{A_\nu B_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=0 \qquad \sum_{\nu=1}^{5}\frac{1}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=\frac{1}{\varkappa}$$

$$\sum_{\nu=1}^{5}\frac{A_\nu C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=0 \qquad \sum_{\nu=1}^{5}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=4$$

$$\sum_{\nu=1}^{5}\frac{B_\nu C_\nu}{\Omega_{A_\nu A_\nu}\sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}=0$$

außerdem liefert Gleichung 33 noch folgende vier Relationen:

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{A_\nu \cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\sqrt{\Omega_{A_\nu A_\nu}} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \qquad \sum_{\nu=1}^{5} \frac{C_\nu \cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\sqrt{\Omega_{A_\nu A_\nu}} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{5} \frac{B_\nu \cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\sqrt{\Omega_{A_\nu A_\nu}} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0 \qquad \sum_{\nu=1}^{5} \frac{\cos\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)}{\sqrt{\Omega_{A_\nu A_\nu}} \sin^2\left(\frac{R_\nu}{2ki}\right)} = 0.$$

Dies sind im Ganzen 15 Relationen, analog den bei Darboux für den euklidischen Raum angegebenen Gleichungen.

VIII. Aufstellung der Gleichung für die nicht euklidische Cyklide, wenn die Deferente hinsichtlich ihrer Lage relativ zur Fundamentalfläche gegeben ist.

Die Gleichungen zweier Flächen zweiten Grades werden bekanntlich dann besonders einfach, wenn man dieselben auf das ihnen gemeinsame Polartetraeder bezieht, und zwar enthalten sie dann nur noch die Quadrate der einzelnen Unbekannten. Für zwei Flächen zweiten Grades $f = 0$ und $\varphi = 0$ ist dies immer möglich, solange die aus den Koeffizienten der Gleichung $f + \lambda\varphi = 0$ gebildete Determinante, gleich null gesetzt, vier verschiedene Werte für λ liefert. Sobald jedoch die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine oder mehrere mehrfache Wurzeln besitzt, ist eine solche Transformation auf das gemeinsame Polartetraeder nicht mehr möglich oder auf unendlich viele Weise möglich. Indem man nun darauf achtet, wievielfach eine solche Wurzel ist und ob für eine solche mehrfache Wurzel etwa außer $\Delta(\lambda)$ auch noch die ersten oder zweiten Unterdeterminanten verschwinden, lassen sich nach Sylvester und Weierstraß 14 Fälle (den allgemeinen Fall inbegriffen) unterscheiden, welche im zweiten Bande von Clebsch-Lindemann[1]) ausführlich behandelt sind. Der folgenden Untersuchung soll nun die jeweilige kanonische Form für $f = 0$ und $\varphi = 0$, wie sie für jeden einzelnen Fall an der erwähnten Stelle angegeben ist, zu Grunde gelegt werden und, indem $f = 0$ als die Gleichung der Deferente, $\varphi = 0$ als die der Fundamentalfläche aufgefaßt wird, soll jedesmal bei zugleich fest vorgegebener,

[1]) Clebsch-Lindemann, II. Band, pag. 215 u. folg.

sonst aber beliebig orientierter Direktorkugel die Gleichung der zugehörigen nicht-euklidischen Cyklide aufgestellt werden. Für den ersten Fall sei die Rechnung ausführlich angegeben, in den übrigen Fällen sollen nur die Resultate angeführt werden:

1. Allgemeiner Fall.

Die Deferente ist gegeben in der Form:

49. $$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

(An Stelle der vorhin erwähnten Werte λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ist hier sowohl wie in den übrigen Fällen die Bezeichnungsweise a_1, a_2, a_3, a_4 gesetzt). Die Gleichung der Fundamentalfläche lautet:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Sei ferner die Gleichung der Direktorkugel in der Form gegeben:

$$K \equiv (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4)^2 - \lambda^2 \Omega_{bb} \Omega_{xx} = 0,$$

wo die b_1, b_2, b_3, b_4 die Koordinaten des Mittelpunktes bedeuten, und die variable die Fläche erzeugende Kugel definiert durch die Gleichung:

50. $$V \equiv (y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4)^2 - \mu^2 \Omega_{yy} \Omega_{xx} = 0.$$

Die Bedingung dafür, daß die Kugel V die feste Kugel K stets unter rechtem Winkel schneidet, ist:

$$\frac{\Omega_{by}}{\sqrt{\Omega_{bb}\,\Omega_{yy}}} = \frac{\Omega_{bz}}{\sqrt{\Omega_{bb}\,\Omega_{zz}}} \cdot \frac{\Omega_{by}}{\sqrt{\Omega_{yy}\,\Omega_{zz}}}$$

oder:

51. $$\Omega_{zz}\,\Omega_{by} = \Omega_{bz}\,\Omega_{yz}$$

wenn z einen Punkt der Schnittkurve von V und K darstellt. Eliminiert man diesen speziellen Punkt z, indem man bedenkt, daß derselbe die Gleichungen beider Kugeln erfüllen muß und also die Relationen bestehen:

$$\Omega_{bz}^2 = \lambda^2 \Omega_{bb}\,\Omega_{zz}$$
$$\Omega_{yz}^2 = \mu^2 \Omega_{yy} \Omega_{zz}$$

so geht Gleichung 51 in die folgende über:

$$(b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4) = \lambda\,\mu \sqrt{\Omega_{bb}\,\Omega_{yy}}.$$

Setzt man den sich hieraus ergebenden Wert von μ (wo μ vom Radius der variablen Kugel abhängt), in die Gleichung 50 ein und zieht zugleich die Wurzel, so ergibt sich:

52. $$\lambda (y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4) \sqrt{\Omega_{bb}} = (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4) \sqrt{\Omega_{xx}}$$

oder, indem man jetzt die Gleichung nach y ordnet, erhält man folgendes:

$$(\lambda x_1 \sqrt{\Omega_{bb}} - b_1 \sqrt{\Omega_{xx}})\, y_1 + (\lambda x_2 \sqrt{\Omega_{bb}} - b_2 \sqrt{\Omega_{xx}})\, y_2 +$$
$$(\lambda x_3 \sqrt{\Omega_{bb}} - b_3 \sqrt{\Omega_{xx}})\, y_3 + (\lambda x_4 \sqrt{\Omega_{bb}} - b_4 \sqrt{\Omega_{xx}})\, y_4 = 0.$$

Führt man noch, um die folgende Rechnung einfacher und übersichtlicher zu gestalten, für die vier Klammerausdrücke die Abkürzungen A, B, C, D ein, so lautet die letzte Gleichung einfach:

53. $$A y_1 + B y_2 + C y_3 + D y_4 = 0.$$

Da der Punkt z die durch Gleichung 49 gegebene Fläche beschreiben soll, so gilt ferner die Gleichung:

54. $$F \equiv a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2 = 0.$$

Um die Enveloppe der variablen Kugel zu finden, denkt man sich:

$$y_1 = -\frac{1}{A}(B y_2 + C y_3 + D y_4)$$

in die Gleichung 54 eingesetzt und bildet:

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0.$$

Dies wird:

$$-\frac{2 a_1 y_1}{A} B + 2 a_2 y_2 = 0 \text{ also: } y_2 = \frac{a_1 B}{a_2 A} y_1 \text{ und:}$$
$$-\frac{2 a_1 y_1}{A} C + 2 a_3 y_3 = 0 \text{ also: } y_3 = \frac{a_1 C}{a_3 A} y_1.$$

Substituiert man nun in Gleichung 53 und 54 die hiedurch gefundenen Werte für y_2 und y_3, so erhält man folgende beiden Relationen:

$$(a_2 a_3 A^2 + a_1 a_3 B^2 + a_1 a_2 C^2)\, y_1^2 + a_2 a_3 A D y_4 = 0$$
$$a_1 (a_2 a_3 A^2 + a_1 a_3 B^2 + a_1 a_2 C^2) y_1^2 + a_2 a_3 a_4 A^2 y_4^2 = 0.$$

Die Elimination von y_1 aus beiden Gleichungen liefert endlich folgendes:

$$a_2 a_3 a_4 A^2 + a_1 a_3 a_4 B^2 + a_1 a_2 a_4 C^2 + a_1 a_2 a_3 D^2 = 0$$

oder, indem man jetzt für A, B, C, wieder die ursprünglichen Klammergrößen einführt und die Wurzelausdrücke beseitigt:

$$[(a_2 a_3 a_4 b_1^2 + a_1 a_3 a_4 b_2^2 + a_1 a_2 a_4 b_3^2 + a_1 a_2 a_3 b_4^2)\, \Omega_{xx}$$
$$+ \lambda^2 (a_2 a_3 a_4 x_1^2 + a_1 a_3 a_4 x_2^2 + a_1 a_2 a_4 x_3^2 + a_1 a_2 a_3 x_4^2)\, \Omega_{bb}]^2$$
$$= 4\lambda^2 \Omega_{bb}\, \Omega_{xx} (a_2 a_3 a_4 b_1 x_1 + a_1 a_3 a_4 b_2 x_2 + a_1 a_2 a_4 b_3 x_3$$
$$+ a_1 a_2 a_3 b_4 x_4^2)^2.$$

Dies stellt nun die Gleichung der verlangten nicht-euklidischen Cyklide dar.

2. Fall.

Es fallen zwei Wurzeln zusammen ($a_3 = a_1$), ohne daß zugleich alle ersten Unterdeterminanten verschwinden, d. h. die Deferente berührt die Fundamentalfläche. Die Deferente ist hier gegeben durch die Gleichung:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 a_3 x_3 x_4 - x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung der Fundamentalfläche lautet:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2 x_3 x_4 = 0.$$

Die Gleichung der Direktorkugel sei diesmal:

$$K \equiv (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_4 x_3 + b_3 x_4)^2 - \lambda^2\, \Omega_{bb}\, \Omega_{xx} = 0$$

und die Gleichung der variablen Kugel dementsprechend:

$$V \equiv (y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_4 x_3 + y_3 x_4)^2 - \mu^2\, \Omega_{yy}\, \Omega_{xx} = 0.$$

Als Gleichung für die nicht-euklidische Cyklide ergibt sich für diesen Fall:

$$[(a_2 a_3 b_1^2 + a_1 a_3^2 b_2^2 + 2 a_1 a_2 a_3 b_3 b_4 + a_1 a_2 b_3^2)\, \Omega_{xx}$$
$$+ \lambda^2 (a_2 a_3^2 x_1^2 + a_1 a_3^2 x_2^2 + 2 a_1 a_2 a_3 x_3 x_4 + a_1 a_2 x_3^2)\, \Omega_{bb}]^2$$
$$= 4\lambda^2 \Omega_{bb}\, \Omega_{xx} (a_2 a_3^2 b_1 x_1 + a_1 a_3^2 b_2 x_2 + a_1 a_2 (a_3 b_4 + b_3) x_3$$
$$+ a_1 a_2 a_3 b_3 x_4)^2.$$

3. Fall.

Es ist eine dreifache Wurzel a_2 und eine einfache Wurzel a_1 vorhanden, ohne daß zugleich alle ersten Unterdeterminanten verschwinden, d. h. Deferente und Fundamentalfläche berühren sich stationär. Die Gleichung der Deferente ist für diesen Fall:

$$a_1 x_1^2 + a_2 (x_3^2 + 2 x_2 x_4) - 2 x_2 x_3 = 0.$$

Die Fundamentalfläche hat zur Gleichung:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_3^2 + 2 x_2 x_4 = 0.$$

Es sei ferner die Gleichung der Direktorkugel:

$$K \equiv (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_2 x_4)^2 - \lambda^2 \Omega_{bb} \Omega_{xx} = 0$$

und die Gleichung der variablen Kugel demgemäß in der folgenden Form vorgelegt:

$$V \equiv (y_1 x_1 + y_4 x_2 + y_3 x_3 + y_2 x_4)^2 - \mu^2 \Omega_{yy} \Omega_{xx} = 0.$$

Für die zugehörige nicht-euklidische Cyklide ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&[(a_2^2 b_1^2 + a_1 b_2^2 + 2 a_1 a_2 b_2 b_3 + a_1 a_2^2 b_3^2 + 2 a_1 a_2^2 b_2 b_4) \Omega_{xx} \\ &+ \lambda^2 (a_2^3 x_1^2 + a_1 x_2^2 + 2 a_1 a_2 x_2 x_3 + a_1 a_2^2 x_3^2 + 2 a_1 a_2^2 x_2 x_4) \Omega_{bb}]^2 \\ &= 4 \lambda^2 (a_2^3 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 + a_1 a_2 (b_3 + a_2 b_4) + a_1 a_2 (b_2 + a_2 b_3) x_3 \\ &\qquad + a_1 a_2^2 b_3 x_4)^2 \Omega_{xx} \Omega_{bb}.\end{aligned}$$

4. Fall.

Es sind zwei Doppelwurzeln a_1 und a_2 vorhanden, und für keine von ihnen verschwinden alle ersten Unterdeterminanten, d. h. die Schnittkurve der Deferente mit der Fundamentalfläche zerfällt in eine gerade Linie und in eine Raumkurve dritter Ordnung. Die Gleichung der Deferente lautet für diesen Fall:

$$x_1^2 + x_3^2 - 2 a_1 x_1 x_2 - 2 a_2 x_3 x_4 = 0$$

und die Fundamentalfläche erscheint in der Form:

$$\Omega_{xx} \equiv 2 x_1 x_2 + 2 x_3 x_4 = 0.$$

Es sei die Direktorkugel in folgender Gestalt vorgelegt:

$$K \equiv (b_2 x_1 + b_1 x_2 + b_4 x_3 + b_3 x_4) - \lambda^2 \Omega_{bb} \Omega_{xx} = 0$$

und somit die variable Kugel durch folgende Gleichung definiert:

$$V = (y_2 x_1 + y_1 x_2 + y_4 x_3 + y_3 x_4) - \mu^2 \Omega_{yy} \Omega_{xx}.$$

Die zugehörige Cyklide nimmt dann hinsichtlich ihrer Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}&[(a_2^2 b_1^2 + 2 a_1 a_2^2 b_1 b_2 + 2 a_1^2 a_2 b_3 b_4 + a_1^2 b_3^2) \Omega_{xx} + \lambda^2 (a_2^2 x_1^2 \\ &+ 2 a_1 a_2^2 x_1 x_2 + a_1^2 x_3^2 + 2 a_1^2 a_2 x_3 x_4) \Omega_{bb}]^2 = 4 \lambda^2 (a_2^2 (a_1 b_2 \\ &+ b_1) + a_1 a_2^2 b_1 x_2 + a_1^2 (a_2 b_4 + b_3) x_3 + a_1^2 a_2 b_3 x_4)^2 \Omega_{bb} \Omega_{xx}.\end{aligned}$$

5. Fall.

Es ist a_1 eine vierfache Wurzel von $\Delta(a) = 0$ und die $\Delta_{ik}(a_1)$ sind nicht sämtlich gleich null; d. h. die Schnittkurve der Deferente

mit der Fundamentalfläche besteht aus einer geraden Linie und einer dieselbe berührenden Raumkurve dritter Ordnung. Die Normalform für die Gleichung der Deferente lautet hier:

$$x_2^2 + 2\,x_3 x_1 - 2\,a_1\,(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$

und die Fundamentalfläche hat folgende Gestalt:

$$\Omega_{xx} - 2\,x_1 x_4 + 2\,x_2 x_3 = 0.$$

Die Direktorkugel ist definiert durch:

$$K \equiv (b_4 x_1 + b_3 x_2 + b_2 x_3 + b_1 x_4)^2 - \lambda^2\,\Omega_{bb}\,\Omega_{xx} = 0$$

und die variable Kugel infolgedessen durch:

$$V \equiv (y_4 x_1 + y_3 x_2 + y_2 x_3 + y_1 x_4)^2 - \mu^2\,\Omega_{bb}\,\Omega_{xx} = 0.$$

Die zugehörige Cyklide wird dann eine Gleichung von folgender Form besitzen:

$$\begin{aligned}&[(b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + 2\,a_1^3 b_2 b_3 + 2\,a_1^2 b_1 b_3 + 2\,a_1 b_1 b_2 + 2\,a_1^3 b_1 b_4)\,\Omega_{xx}\\ &+ \lambda^2\,(x_1^2 + a_1^2 x_2^2 + 2\,a_1^3 x_2 x_3 + 2\,a_1^2 x_1 x_3 + 2\,a_1 x_1 x_2 + 2\,a_1^3 x_1 x_4)\,\Omega_{bb}]^2\\ &= 4\,\lambda^2\,((b_1 + a_1 b_2 + a_1^2 b_3 + a_1^3 b_4)\,x_1 + a_1\,(b_1 + a_1 b_2 + a_1^2 b_3)\,x_2\\ &+ a_1^2\,(b_1 + a_1 b_2)\,x_3 + a_1^3 b_1 x_4)^2\,\Omega_{bb}\,\Omega_{xx}.\end{aligned}$$

6. Fall.

Die Wurzeln von $\Delta(a) = 0$ verteilen sich hier wieder wie beim zweiten Falle, zugleich verschwinden aber sämtliche $\Delta_{ik}(a_3)$, während jedoch die zweiten Unterdeterminanten nicht alle gleich null sind d. h. die Schnittkurve von der Deferente und der Fundamentalfläche zerfällt in zwei ebene Kegelschnitte. Die kanonische Form für die Deferente wird hier:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3\,(x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

während die Fundamentalfläche durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\Omega_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Vergleicht man diese beiden letzteren Gleichungen mit den entsprechenden des ersten Falles, so erkennt man sofort, daß dieselben sich aus den dort angeführten Gleichungen für $a_4 = a_3$ sofort herleiten lassen. Als Gleichungen für die Direktorkugel K und die variable Kugel V kommen hier dieselben, wie im ersten Falle in Betracht. Die Gleichung der Cyklide wird nun demgemäß:

$$[(a_2 a_3 b_1^2 + a_1 a_3 b_2^2 + a_1 a_2 b_3^2 + a_1 a_2 b_4^2)\,\Omega_{xx} + \lambda^2 (a_2 a_3 x_1^2 + a_1 a_3 a_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 + a_1 a_2 x_4^2)\,\Omega_{bb}]^2 = 4\,\lambda^2 (a_2 a_3 b_1 x_1 + a_1 a_3 b_2 x_2 + a_1 a_2 b_3 x_3 + a_1 a_2 b_4 x_4)^2\,\Omega_{bb}\,\Omega_{xx}.$$

7. Fall.

Die Gleichung $\Delta(a) = 0$ hat eine mehrfache Wurzel a_1 sowie eine dreifache Wurzel a_2; für letztere verschwinden alle ersten Unterdeterminanten. In diesem Falle besteht die Schnittkurve wieder aus zwei ebenen Kegelschnitten, die sich berühren müssen. Betrachtet man die Normalform der Deferente für diesen Fall:

$$a_1 x_1^2 + a_2 (x_2^2 + 2\,x_3\,x_4) - x_3^2 = 0,$$

sowie die der Fundamentalfläche:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3\,x_4 = 0,$$

so erkennt man, daß sich diese Gleichungen für $a_2 = a_3$ mit denen des zweiten Falles decken. Es gelten daher die dort angeführten Gleichungen für K und V auch hier und die Gleichung der Cyklide wird somit:

$$[(a_2^2 b_1^2 + a_1 a_2 b_2^2 + 2\,a_1 a_2 b_3 b_4 - a_1 b_3^2)\,\Omega_{xx} + \lambda^2 (a_2^2 x_1^2 + a_1 a_2 x_2^2 + 2\,a_1 a_2 x_3 x_4 - a_1 x_3^2)\,\Omega_{bb}]^2 = 4\,\lambda^2 (a_2^2 b_1 x_1 + a_1 a_2 b_2 x_2 + a_1 (a_2 b_4 + b_3) x_3 + a_1 a_2 b_3 x_4)^2\,\Omega_{bb}\,\Omega_{xx}.$$

8. Fall.

Es sind zwei Doppelwurzeln vorhanden, für a_1 verschwinden auch sämtliche ersten Unterdeterminanten $\Delta_{ik}(a_1)$, dagegen nicht alle zweiten d. h. die Schnittkurve der Deferente mit der Fundamentalfläche zerfällt in zwei ebene Kegelschnitte, deren einer in ein Linienpaar ausartet. Die Gleichung der Deferente ergibt sich hier in der Form:

$$a_1 (x_1^2 + x_2^2) + 2\,a_3\,x_3\,x_4 - x_3^2 = 0$$

und die Gleichung der Fundamentalfläche in der Gestalt:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3\,x_4 = 0.$$

Dies sind genau die im zweiten Falle aufgeführten Gleichungen, wenn dort überall $a_2 = a_1$ gesetzt wird. Werden für K und V gleichfalls die im zweiten Falle hiefür angegebenen Gleichungen zu Grunde gelegt, so ergibt sich für die Cyklide folgende Gleichung:

$$[(a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_1 b_3^2 + 2\,a_1 a_3 b_3 b_4)\,\Omega_{xx} + \lambda^2 (a_3^2 x_1^2 + a_3^2 x_2^2 + a_1 x_3^2 + 2\,a_1 a_2 x_3 x_4)\,\Omega_{bb}]^2 = 4\,\lambda^2 (a_3^2 b_1 x_1 + a_3^2 b_2 x_2 + a_1 (a_3 b_4 + b_3) x_3 + a_1 a_3 b_3 x_4)^2\,\Omega_{xx}\,\Omega_{bb}.$$

9. Fall.

Es sind zwei Doppelwurzeln a_1 und a_3 vorhanden und für jede von ihnen verschwinden alle ersten Unterdeterminanten von $\Delta(a)$ d. h. die Durchdringungskurve der Deferente und der Fundamentalfläche besteht aus vier geraden Linien, welche ein windschiefes Viereck bilden. Die Gleichung der Deferente lautet hier:

$$a_1 (x_1^2 + x_2^2) + a_3 (x_3^2 + x_4^2) = 0$$

und die Fundamentalfläche wird wiederum:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Man erkennt sofort, daß vorstehende Gleichungen aus den im ersten Falle angegebenen Gleichungen folgen, wenn dort nur $a_2 = a_1$ und $a_4 = a_3$ gesetzt wird. Legt man die dort erwähnten Gleichungen für K und V auch hier zu Grunde, so erhält die Gleichung der nicht-euklidischen Cyklide die folgende Gestalt:

$$[(a_3 b_1^2 + a_3 b_2^2 + a_1 b_3^2 + a_1 b_4^2)\,\Omega_{xx} + \lambda^2 (a_3 x_1^2 + a_3 x_2^2 + a_1 x_3^2 + a_1 x_4^2)\,\Omega_{bb}]^2 = 4\lambda^2 (a_3 b_1 x_1 + a_3 b_2 x_2 + a_1 b_3 x_3 + a_1 b_4 x_4)^2\,\Omega_{xx}\Omega_{bb}.$$

10. Fall.

Alle vier Wurzeln sind in a_1 zusammengefallen und alle $\Delta_{ix}(a)$ sind gleich 0 für $a = a_1$, während die $\Delta'_{ik}(a_1)$ und die zweiten Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden, d. h. die Durchdringungskurve der beiden Flächen besteht aus einem Kegelschnitte und zwei sich auf demselben treffenden geraden Linien. Die Deferente ist hier folgendermaßen definiert:

$$a_1 (x_1^2 + x_3^2 + 2 x_2 x_4) - 2 x_2 x_3 = 0$$

und die Fundamentalfläche durch folgende Gleichung:

$$\Omega \equiv x_1^2 + x_3^2 + 2 x_2 x_4 = 0.$$

Diese Gleichungen stimmen mit jenen des dritten Falles überein, wenn nur dort $a_2 = a_1$ gesetzt wird. Es gelten also auch hier die dort für die Kugeln K und V angeführten Gleichungen. Für die nicht-euklidische Cyklide selbst ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$[(a_1^2 b_1^2 + b_2^2 + 2 a_1 b_2 b_3 + a_1^2 b_3^2 + 2 a_1^2 b_2 b_4)\,\Omega_{xx} + \lambda^2\,\Omega_{bb}\,(a_1^2 x_1^2 + x_2^2 + 2 a_1 x_2 x_3 + a_1^2 x_3^2 + 2 a_1^2 x_2 x_4)]^2 = 4\lambda^2 (a_1^2 b_1 x_1 + (b_2 + a_1 b_3 + a_1^2 b_4) x_2 + a_1 (b_2 + a_1 b_3) x_3 + a_1^2 b_2 x_4)^2\,\Omega_{xx}\Omega_{bb}.$$

11. Fall.

Es ist eine vierfache Wurzel a_1 vorhanden und es verschwinden nicht nur alle ersten Unterdeterminanten, sondern auch die Differentialquotienten derselben $\Delta'_{ik}(a_1)$, während die zweiten Unterdeterminanten nicht alle gleich null werden. Deferente und Fundamentalfläche berühren sich hier längs einer geraden Linie und schneiden sich außerdem noch in zwei Geraden. Die kanonische Form für die Gleichung der Deferente lautet diesmal:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\,a_1\,(x_1\,x_2 + x_3\,x_4) = 0$$

und die Fundamentalfläche erscheint in der Gestalt:

$$\Omega_{xx} \equiv 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_3\,x_4 = 0.$$

Vergleicht man diese beiden Formen mit den entsprechenden des Falles vier, so erkennt man, daß sie aus letzteren für $a_1 = a_2$ hergeleitet werden können. — Die zugehörige Cyklide genügt daher folgender Gleichung, wenn auch wieder für K und V die im vierten Falle entwickelten Gleichungen zu Grunde gelegt werden:

$$\begin{aligned}[(b_1^2 + 2\,a_1\,b_1\,b_2 + 2\,a_1\,b_3\,b_4 + b_3^2)\,\Omega_{xx} + \lambda^2\,(x_1^2 + 2\,a_1\,x_1\,x_2 \\ + 2\,a_1\,x_3\,x_4 + x_3^2)\,\Omega_{bb}]^2 = 4\,\lambda^2\,((b_2\,a_1 + b_1)\,x_1 + a_1\,b_1\,x_2 \\ + (a_1\,b_4 + b_3)\,x_3 + a_1\,b_3\,x_4)^2\,\Omega_{xx}\,\Omega_{bb}.\end{aligned}$$

12. Fall.

Es ist eine einfache Wurzel a_1 und eine dreifache Wurzel a_2 vorhanden, für welche letztere alle zweiten Unterdeterminanten verschwinden. In diesem Falle berühren sich die Flächen längs eines Kegelschnittes. Die Gleichung der Deferente nimmt hier folgende Gestalt an:

$$a_1\,x_1^2 + a_2\,(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

während die Fundamentalfläche auf die Form gebracht werden kann:

$$\Omega_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Aus obigem geht hervor, daß hier die Deferente eine Kugel darstellt, deren Mittelpunkt von dem Punkte ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$) gebildet wird; man sieht sofort, daß man obige Gleichung, wenn sie in die für die nicht-euklidische Kugel charakteristische Form gebracht werden soll, auch folgendermaßen schreiben kann:

$$x_1^2 - \frac{a_2}{a_2 - a_1}\,\Omega_{xx} = 0.$$

Die beiden Gleichungen für Deferente und Fundamentalfläche lassen sich wieder sofort aus den im sechsten Falle angeführten Gleichungen herleiten, wenn dort $a_2 = a_3$ gesetzt wird (oder was dasselbe ist, aus den Gleichungen des Falles 1 für $a_1 = a_2 = a_3$). Unter Benützung der an dieser Stelle gegebenen Gleichungen für die Direktorkugel und die variable Kugel ergibt sich als Gleichung für die nicht-euklidische Cyklide folgende:

$$[(a_2 b_1^2 + a_1 b_2^2 + a_1 b_3^2 + a_1 b_4^2)\,\Omega_{xx} + \lambda^2 (a_2 x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_1 x_3^2 + a_1 x_4^2)\,\Omega_{bb}]^2 = 4\,\lambda^2 (a_2 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 + a_1 b_3 x_3 + a_1 b_4 x_4)^2\,\Omega_{xx}\Omega_{bb}.$$

13. Fall.

Die Gleichung $\Delta(a) = 0$ hat eine vierfache Wurzel und für dieselbe verschwinden alle zweiten Unterdeterminanten d. h. Deferente und Fundamentalfläche berühren sich gegenseitig längs zweier gerader Linien. Aus der Gleichung für die Deferente wird hier:

$$a_1 (x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3 x_4) + x_3^2 = 0$$

und als Fundamentalfläche ergibt sich:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3 x_4 = 0.$$

Man sieht sofort, daß dies nichts anderes als die in Fall 7 angeführten Gleichungen sind, wenn nur dort $a_1 = a_2$ gesetzt wird (oder auch die in Fall 2 aufgestellten Gleichungen, sobald dort $a_1 = a_2 = a_3$ gesetzt wird). Bedenkt man wieder, daß die dort angeführten Gleichungen für V und K auch hier gelten, so lautet die fertige Cyklidengleichung folgendermaßen:

$$[(a_1 b_1^2 + a_1 b_2^2 + 2\,a_1 b_3 b_4 + b_3^2)\,\Omega_{xx} + \lambda^2 (a_2 x_1^2 + a_1 x_2^2 + 2\,a_1 x_3 x_4 + x_3^2)\,\Omega_{bb}]^2 = 4\,\lambda^2 (a_1 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 + (a_1 b_4 + b_3)\,x_3 + a_1 b_3 x_4)^2\,\Omega_{xx}\Omega_{bb}.$$

14. Fall.

Alle beiden Flächen, Deferente sowohl wie Fundamentalfläche sind Kegel, die sich längs einer geraden Linie berühren. Die Deferente ist gegeben durch folgende Gleichung:

$$a_1 (x_1^2 + 2\,x_2 x_3) - 2\,x_2 x_4 = 0$$

und die Fundamentalfläche durch:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + 2\,x_2 x_3 = 0.$$

In diesem Falle, bei welchem die Fundamentalfläche ein Kegel ist, muß der Begriff „Kugel“ erst genauer definiert werden. Im

allgemeinen ist ja eine nicht-euklidische Kugel als eine Fläche zweiten Grades definiert, welche die Fundamentalfläche längs einer Ebene berührt und zwar ist der Mittelpunkt der Pol dieser Ebene in bezug auf die Fundamentalfläche. Nun entspricht hier einer beliebigen Ebene als Pol die Spitze des Kegels $\Omega_{xx} = 0$, einer Ebene durch die Spitze des Kegels dagegen entspricht eine Reihe von Polen, welche alle auf einer durch die Spitze gehenden Geraden gelegen sind. Es gibt also hier zweierlei Arten von Kugeln: 1. Alle Kugeln, welche längs einer beliebigen Ebene den Kegel berühren, haben die Kegelspitze zum Mittelpunkt. 2. Alle Kugeln, welche den Kegel längs einer durch seine Spitze gehenden Ebene berühren, haben eine einfach unendliche Serie von Mittelpunkten, die alle auf einer durch die Kegelspitze gehenden Geraden liegen. Für die die Cyklide erzeugenden Kugeln können nun Kugeln der ersten Art nicht in Betracht kommen, da ja ihre Mittelpunkte nach früherem eine Fläche zweiten Grades erfüllen sollen, während dieselben nach obigem die Kegelspitze zum gemeinsamen Mittelpunkte hätten. Aber auch die fest vorgegebene Direktorkugel darf nicht der Klasse 1 angehören; denn für diesen Fall läßt sich, wie man sich leicht überzeugen kann, die Orthogonalitätsbedingung überhaupt nicht aufstellen, da auf beiden Seiten der Bedingungsgleichung je einer der beiden Faktoren identisch verschwindet; der Begriff der Orthogonalität geht eben hier verloren. Faßt man daher nur Kugeln zweiter Art für V und K ins Auge, so wird die Gleichung der Direktorkugel zu folgender:

$$(b_1 x_1 + b_3 x_2 + b_2 x_3)^2 - \lambda^2 \Omega_{bb} \Omega_{xx} = 0$$

und je der variablen Kugel dementsprechend:

$$(y_1 x_1 + y_3 x_2 + y_2 x_3)^2 - \lambda^2 \Omega_{bb} \Omega_{xx} = 0.$$

Die Gleichung wird hier für die zugehörige Cyklide zunächst folgende:

$$[(b_1^2 + 2 b_2 b_3) \Omega_{xx} + \lambda^2 \Omega_{bb} (x_1^2 + 2 x_2 x_3)]^2 = 4 \lambda^2 (b_1 x_1 + b_2 x_3 + b_3 x_2)^2 \Omega_{xx} \Omega_{bb}$$

und da die beiden links auftretenden Klammergrößen hier nichts anderes als Ω_{bb} bzw. Ω_{xx} selbst sind, so zerfällt die nicht-euklidische Fläche hier in:

$$\Omega_{xx} = 0 \qquad \text{und:}$$

$$\Omega_{bb} \Omega_{xx} (1 + \lambda^2)^2 - 4 \lambda^2 \Omega_{bx}^2 = 0$$

oder, indem man in der letzten Gleichung:

$$\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} = \nu$$

setzt, kommt:

$$\Omega_{bx}^2 - \nu^2\, \Omega_{bb}\, \Omega_{xx} = 0$$

d. h. für diesen Fall zerfällt die Cyklide in die Fundamentalfläche und in eine Kugel, welche sich von der erzeugenden Kugel nur hinsichtlich des Radius unterscheidet.

Hiemit sind alle Möglichkeiten für die gegenseitige Lage von Deferente und Fundamentalfläche erschöpft.

Aufstellung der kanonischen Gleichungsform für die nicht-euklidische allgemeinste Cyklide, unabhängig vom gewählten Koordinatensystem (eine Folgerung aus dem vorangehenden Kapitel).

Wenn man die Gleichungen in den vorhergegangenen vierzehn Fällen näher betrachtet, wird man leicht erkennen, daß jede Gleichung folgende charakteristische Form zeigt:

55. $$[\Phi_{bb}\, \Omega_{xx} + \lambda^2\, \Omega_{bb}\, \Phi_{xx}]^2 - 4\,\lambda^2\, \Omega_{bb}\, \Omega_{xx}\, \Phi_{bx}^2 = 0$$

und zwar stellt $\Phi_{xx} = 0$ in jedem einzelnen Falle die Reziprokalfläche der betreffenden Deferente in bezug auf die Fundamentalfläche dar. Um dies zu beweisen, braucht man die Reziprokalfläche für den ersten Fall etwa nur aufzustellen. Dort war:

$$F \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

die Gleichung der Deferente und:

$$\Omega_{xx} \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche. Um die Reziprokalfläche von $F = 0$ bezüglich $\Omega_{xx} = 0$ zu erhalten, hat man nur die Gleichung der Polarebene eines Punktes y bezüglich $\Omega_{xx} = 0$ zu bilden. Läßt man dann den Punkt y die Fläche $F = 0$ durchlaufen, so umhüllt die Polarebene die gesuchte Reziprokalfläche $\Phi_{xx} = 0$. Man hat also für y folgende Gleichungen:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0$$
$$F_1 \equiv a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2 = 0.$$

Denkt man sich jetzt aus der ersten der beiden Gleichungen:

$$y_1 = -\frac{1}{x_1}(x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4)$$

in F_1 substituiert und bildet:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_3} = 0,$$

so kommt:

$$y_2 = \frac{a_1 x_2}{a_2 x_1} y_1 \quad \text{und} \quad y_3 = \frac{a_1 x_3}{a_3 x_1} y_1.$$

Durch Substitution von y_2 und y_3 hieraus in obige beiden Gleichungen ergibt sich zunächst:

$$(a_2 a_3 x_1^2 + a_1 a_3 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2) y_1 + a_2 a_3 x_1 x_4 y_4 = 0$$
$$a_1 (a_2 a_3 x_1^2 + a_1 a_3 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2) y_1^2 + a_2 a_3 a_4 x_1^2 y_4^2 = 0$$

und durch Elimination von y_1 aus beiden Gleichungen ergibt sich schließlich das Resultat:

$$a_2 a_3 a_4 x_1^2 + a_3 a_4 a_1 x_2^2 + a_4 a_1 a_2 x_3^2 + a_1 a_2 a_3 x_4^2 = 0.$$

Die linke Seite hier ist nun genau der Koeffizient von $\lambda^2 \Omega_{bb}$ in der ersten Klammer der Endgleichung des Falles 1. Da nun die Form Φ_{xx} als Reziprokalfläche von $F = 0$ und $\Omega_{xx} = 0$ eine Kovariante beider ist und somit Invarianteneigenschaft besitzt, so läßt sich jetzt die nicht-euklidische Cyklide hinsichtlich ihrer Gleichungsform jederzeit sofort angeben, wenn man die Deferente und die Fundamentalfläche auf ein ganz beliebiges Koordinatensystem bezieht. Es liege die Gleichung der Deferente in der allgemeinen Form vor:

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k a_{ik} x_i x_k = 0$$

und ebenso die der Fundamentalfläche in der Gestalt:

$$\Omega_{xx} \equiv \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k c_{ik} x_i x_k = 0,$$

dann ergibt sich als Reziprokalfläche folgendes:

$$\Phi_{xx} \equiv \begin{vmatrix} a_{ik} & \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial x_i} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial x_k} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Denkt man sich in Gleichung 55 für Φ_{xx} diesen Ausdruck eingesetzt und ebenso den entsprechenden für Φ_{bx}, so stellt diese Gleichung die verlangte kanonische Form dar.

Es werde nun die Gleichung kurz folgendermaßen geschrieben:

$$F \equiv W_{xx}^2 - 4\,\lambda^2\,\Omega_{bb}\,\Omega_{xx}\,\Phi_{bx}^2 = 0.$$

Man sieht, daß die Ebene $\Phi_{bx} = 0$ die Cyklide nach einer Doppelkurve schneidet mit den Gleichungen:

$$W_{xx} = 0 \quad \Phi_{bx} = 0.$$

Ferner läßt sich unschwer zeigen, daß $F = 0$ von $\Omega_{xx} = 0$ längs des Schnittes von $\Omega_{xx} = 0$ mit $\Phi_{xx} = 0$ berührt wird. Der Schnitt von $F = 0$ mit $\Omega_{xx} = 0$ ist ja gleich dem Schnitt von $\Phi_{xx} = 0$ mit $\Omega_{xx} = 0$. Bilden wir allgemein die Tangentialebene an die Cyklide im Punkte y, so wird diese:

$$W_{yy}\,W_{xy} - 2\,\lambda^2\,\Omega_{bb}\,(\Omega_{yy}\,\Phi_{bx}\,\Phi_{by} + \Omega_{xy}\,\Phi_{by}^2) = 0.$$

Liegt dieser Punkt y nun zugleich auf der Fundamentalfläche, so wird $\Omega_{yy} = 0$ und, da nach obigem die $F = 0$ und $\Omega_{xx} = 0$ gemeinsamen Punkte auch auf $\Phi_{xx} = 0$ liegen, wird auch $\Phi_{yy} = 0$ d. h. die Gleichung geht über in:

$$\Omega_{xy}\,\Phi_{by}^2 = 0.$$

Die Tangentialebene an die Cyklide wird also identisch mit jener an die Fundamentalfläche d. h. es tritt Berührung ein, außer wenn der Faktor Φ_{by}^2 verschwindet, d. h. wenn der Punkt y zugleich der Ebene $\Phi_{bx} = 0$ angehört. Solche Punkte, welche gleichzeitig Ω_{xx}, Φ_{xx} und Φ_{bx} zu null machen, gibt es im allgemeinen vier verschiedene. Um auch die Tangentialverhältnisse in diesen zu studieren, braucht man nur zu beachten, daß diese vier Punkte auch gleichzeitig auf der Doppelkurve liegen. In jedem Punkte einer Doppelkurve wird im allgemeinen ein in ein Ebenenpaar zerfallender Tangentialkegel an die Fläche existieren. Für einen beliebigen Punkt y der Doppelkurve ist dieser Kegel:

$$W_{xy}^2 - \lambda^2\,\Omega_{bb}\,\Omega_{yy}\,\Phi_{bx}^2 = 0,$$

d. h. er zerfällt in die zwei Tangentialebenen:

$$W_{xy} \pm \lambda\sqrt{\Omega_{bb}\,\Omega_{yy}}\,\Phi_{bx} = 0.$$

Für die vier speziellen Punkte aber ergibt sich, weil Ω_{yy} zu null wird:

$$W_{yy} = 0,$$

d. h. hier fallen die beiden Tangentialebenen in eine doppeltzählende Ebene zusammen oder mit anderen Worten, diese vier Punkte sind sogenannte Cuspidalpunkte.

Hiedurch ist eine Einteilung der nicht-euklidischen Cykliden gegeben, wie sie der Einteilung der gewöhnlichen Cykliden nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Ebene entspricht.

Vita.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit wurde am 23. Januar 1882 als Sohn des Bankkassiers Philipp Münich zu München geboren. Ebenda besuchte er die Volksschule sowie das K. Ludwigsgymnasium. Nach Ablegung des Gymnasial-Absolutoriums bezog er im Herbste 1901 die K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München, wo er sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften widmete. Hier besuchte er die Vorlesungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten: v. Baeyer, Bauer, Doehlemann, Graetz, Lindemann, Lipps, Pringsheim, Ranke, Röntgen, v. Seeliger, Voss, v. Weber.